Осцилирующее движение тяжелого шара по внутренней поверхности кругового цилиндра

Комаров Г.В., Мишарин Д.В., Митюшов Е.А.,профессор. д.ф.-м.н.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
Екатеринбург, Россия

Oscillating motion of a heavy ball on the inner surface of a circular cylinder

Komarov G.V., Misharin D.V., Mityushov E.A.
Ural Federal University, named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
Yekaterinburg, Russia

Одна из задач 25 Международного и XXXIV Всероссийского турниров юных физиков под названием «Капризный мяч» формулируется следующим образом: «Нередко случается, что мяч для гольфа, попав в цилиндрическую ямку, выскакивает из нее. Исследуйте условия, при которых можно наблюдать описанный феномен и объясните его». Как это часто бывает в конкурсных заданиях, за простой, на первый взгляд, формулировкой скрывается достаточно сложная проблема, требующая нестандартного мышления, глубоких знаний и хорошего владения математическим аппаратом. Самостоятельная попытка решить предложенную задачу может быстро завести «юного физика» в тупик и он, обратившись к всемогущей Сети, безусловно, найдет помощь и спасительную ссылку [1]. При этом появляется новая проблема – приведенное решение, скорей всего, не будет понято не только школьником, но и студентом технического вуза, закончившим изучение предусмотренных основной образовательной программой дисциплин математического и естественнонаучного цикла. Оно рассчитано на студентов-физиков классических университетов. В связи с этим, в работе предлагается адаптированное решение задачи «Капризный мяч», которое полностью базируется на компетенциях, получаемых при изучении дисциплин учебного плана практически всех технических направлений обучения. Это решение хорошо иллюстрирует один из методов решения задач динамики неголономных систем – раздела динамики, который до сих пор не находит должного отражения в рабочих программах, несмотря на многочисленные технические приложения, в частности, при создании управляемых мобильных роботов.

Для ответа на поставленный условием конкурсной задачи вопрос рассмотрим движение шара массой m и радиусом r по внутренней поверхности цилиндра радиусом b (рис.1). Будем полагать, что шар катится без проскальзывания, а положение его центра масс определяется цилиндрическими координатами z и φ .

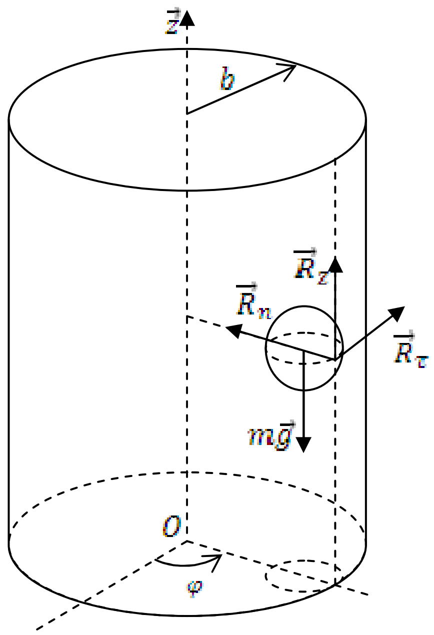

Рис.1

Математическая модель движения шара в этом случае записывается тремя векторными равенствами

$$m\dot{\vec{V}}_c = m\vec{g} + \vec{R}, \tag{1}$$

$$J\dot{\vec{\omega}} = \vec{r}\times\vec{R}, \tag{2}$$

$$\vec{V}_c + \vec{\omega}\times\vec{r} = 0 . \tag{3}$$

Первое равенство выражает теорему о движении центра масс, второе – теорему об изменении кинетического момента, а третье – это уравнение неголономной связи (скорость точки шара контактирующей с цилиндрической поверхностью равна нулю). В уравнениях (1) – (3) приняты следующие обозначения: $\vec{R}$ – реакция цилиндрической поверхности, $\vec{V}_c$ – скорость центра масс шара, J – осевой момент инерции шара, $\vec{\omega}$ – угловая скорость шара, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

От векторных уравнений (1) – (3) перейдем к скалярной форме их записи в проекциях на оси подвижной системы координат с координатным базисом ($\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k}$).

С использованием разложений векторных величин в подвижном базисе уравнение (3) может быть переписано в виде

$$V_\tau\vec{\tau} + V_z\cdot\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{n} & \vec{k} \\ \omega_\tau & \omega_n & \omega_z \\ 0 & -r & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$V_\tau\vec{\tau} + V_z\vec{k} + r\omega_z\vec{\tau} - r\omega_\tau\vec{k} = 0 .$$

Откуда вытекают условия

$$V_\tau + r\omega_z = 0 \quad \text{и} \quad V_z - r\omega_\tau = 0 . \tag{4}$$

Уравнения (1) и (2) в проекциях на оси подвижной системы координат имеют вид

$$\begin{cases} m\dot{V}_\tau = R_\tau \\ m\dfrac{(V_\tau)^2}{b-a} = R_n \\ m\dot{V}_z = mg + R_z \\ J\dot{\omega}_\tau + J\left(\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega}\right)_\tau = -R_z\cdot r \\ J\dot{\omega}_n + J\left(\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega}\right)_n = 0 \\ J\dot{\omega}_z + J\left(\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega}\right)_z = R_\tau r \end{cases}$$

При этом было учтено, что по теореме сложения скоростей

$$\dot{\vec{\omega}} = \left(\dot{\vec{\omega}}\right)_{\overline{\tau,n,k}=const} + \dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega}.$$

Здесь первое слагаемое – это скорость конца вектора $\vec{\omega}$ в подвижной системе координат, а второе слагаемое – его переносная скорость, обусловленная вращением подвижной системы координат с угловой скоростью $\dot{\varphi}\vec{k}$.

Выполняя разложение вектора $\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega}$ по ортам подвижного базиса

$$\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{\tau} & \vec{n} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \omega_\tau & \omega_n & \omega_z \end{vmatrix} = \vec{n}\omega_\tau\dot{\varphi} - \vec{\tau}\omega_n\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\vec{n}\omega_\tau - \vec{\tau}\omega_n),$$

находим

$$\left(\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega}\right)_\tau = -\dot{\varphi}\omega_n;\quad \left(\dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{\omega}\right)_n = \dot{\varphi}\omega_\tau;\quad \left(\vec{\omega}\times\dot{\varphi}\vec{k}\right)_z = 0. \qquad (6)$$

Рассматривая систему уравнений, образуемую первым и последним равенствами системы (5), а также результатом дифференцирования первого равенства из (4), находим

$$\begin{cases} m\dot{V}_\tau = R_\tau \\ J\dot{\omega}_z = R_\tau r \\ \dot{V}_\tau + r\dot{\omega}_z = 0 \end{cases}$$

Откуда

$$\frac{R_\tau}{m} + r\frac{R_\tau r}{J} = 0.$$

Т.е.:

$$R_\tau = 0, \qquad \omega_z = const, \qquad V_\tau = const.$$

Проведя, далее, преобразования четвертого, пятого и шестого равенств системы (5), с учетом соотношений (6) записываем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} J(\dot\omega_\tau - \dot\varphi\omega_n) = -R_z r \\ J(\dot\omega_n + \dot\varphi\omega_\tau) = 0 \\ m\dot V_z = -mg + R_z \end{cases}$$

где, с учетом второго равенства из (4), выполняется соотношение

$$\dot V_z = r\dot\omega_\tau . \qquad (7)$$

Исключая из этой системы уравнений R_z, находим

$$(J + mr^2)\dot\omega_\tau - J\dot\varphi\omega_n = -mg .$$

Дифференцируя это равенство по времени, с учетом условий $V_\tau = const$ и $\dot\varphi = const$, и принимая во внимание равенство $\dot\omega_n = -\dot\varphi\omega_\tau$, находим

$$(J + mr^2)\ddot\omega_\tau + J\dot\varphi^2\omega_\tau = 0 .$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$\omega_\tau = A\sin(kt + \alpha), \qquad k = \sqrt{\frac{J\dot\varphi^2}{J + mr^2}}.$$

Окончательно, с учетом соотношения (7), находим

$$z = z_0 - \frac{rA}{k}\cos(kt + \alpha).$$

Таким образом, при закатывании шара в цилиндрическую лунку его центр масс начинает совершать гармонические колебания по вертикали, в результате чего он выскакивает из этой лунки. Точка качания шара с цилиндрической поверхностью описывает кривую, задаваемую уравнениями

$$z = z_0 + \frac{V_{z0}}{k}\sin kt,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{V_{\tau 0}}{b - r}t .$$

1. Коткин ГЛ., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 352 стр. (задача 9.18)